ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
ОТРАСЛЕВАЯ МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА
«ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2019-2020 УЧ. ГОД

Решения к задачам очного тура
11 класс

Вариант 1

Задание 1.

$(8 \cdot 10)^{20} \vee (8 \cdot (1111))^{10}$ <=> $\sqrt[10]{8^{20} \cdot 10^{20}} \vee \sqrt[10]{8^{10} \cdot (1111)^{10}}$ <=> 6400 ∨ 8888 =>

Ответ: первое число меньше

Задание 2.

В первом неполном произведении последняя цифра 8, во втором 5. Это возможно только, если последняя цифра первого множителя 1, а второй оканчивается на 58. Так как второе неполное произведение трехзначно, то первая цифра первого множителя 1. Далее в первом неполном произведении может получиться при умножении первого множителя на 8 в начале только 10. Значит, при второй цифры в уме осталось 2. Это возможно только, если вторая цифра первого множителя 3. В третьем неполном произведении получилось больше, чем в первом. Значит первая цифра второго множителя больше последней. А тогда она равна 9. Таким образом, первый множитель 131, второй 958.

Ответ: 131, 958

Задание 3.

Так как разность $\sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}$, а $(\frac{1}{2})^{20} < 0{,}000001$, то данное выражение с требуемой точностью равно нулю.

Ответ: $\{0\}$

Задание 4.

$$54\left(-7 + \frac{37}{x+2} - 6 + \frac{37}{x+5}\right) + 739 = 37\left(-10 + \frac{54}{x+3} + 11 + \frac{54}{x+6}\right)$$

$$-54 \cdot 13 + 54 \cdot 37\left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5}\right) + 739 = 37 + 37 \cdot 54\left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+6}\right)$$

$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+6}$; $\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+3}$;

$\frac{2}{(x+6)(x+2)}=\frac{1}{(x+5)(x+3)}$;

$x^2+8x+18=0$ => $\frac{Д}{2}<0$ => Решений нет.

Ответ: нет решений

Задание 5.

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами AC = 3, BC = 4. Разделим прямой угол на три равные части и отложим на получившихся лучах отрезок AM = x, CN = y. По теореме косинусов слагаемые в левой части уравнения соответственно равны AM, MN, NB. Сумма этих отрезков должна равняться 5, т.е. длине гипотенузы AB. Но это возможно лишь в случае, когда точки M и N лежат на гипотенузе AB, причем x = CM биссектриса в треугольнике ACN, а y = CN – биссектриса в треугольнике BCM. По свойствам биссектрисы имеем систему равенств: $yx + 3x = 3y\cdot\sqrt{3}$ и $4y + xy = 4x\sqrt{3}$. Из этой системы находим, что $x=\frac{3y\sqrt{3}}{3+y}$, $y=\frac{4x\sqrt{3}}{4+x}$ и следовательно ответ: $x=\frac{24}{3+4\sqrt{3}}$, $y=\frac{24}{4+3\sqrt{3}}$

Задание 6.

Окружим каждый квадрат полоской шириной $\frac{1}{2}$. Образующиеся фигуры также квадраты со стороной равной $1+2\cdot\frac{1}{2}=2$ имеют площадь, равную 4. Их общая площадь равна $4\cdot 120=480$, в то время как площадь основного прямоугольника равна 500. Значит найдется точка, которая не покрыта построенными квадратами, но это значит, что она удалена от данных квадратов не меньше чем на $\frac{1}{2}$ по всем направлениям. Круг радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в этой точке не имеет общих точек ни с одним из квадратов.

Задание 7.

Сложим все три уравнения системы, получим следствие $x^2+y^2+z^2=x+y+z-3$ или $x(x-1)+y(y-1)+z(z-1)=-3$

Левая часть последнего неравенства четна как сумма трех четных чисел (поскольку произведение любых двух последовательных целых чисел всегда четно), а правая часть – нечетна, что невозможно.

Ответ: нет целых решений.

Задание 8.

Заметим, что функция от x, расположенная в левой части уравнения, ограничена сверху, наибольшее ее значение равно 2^a, в то время как справа расположена функция (от y), наименьшее значение которой равно $6 – a$. Значит для существования единственной пары (x, y), удовлетворяющей данному уравнению, необходимо и достаточно, чтобы $2^a = 6 – a$, отсюда $a = 2$ (слева функция возрастает, справа убывает).

Ответ: $a = 2$.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
ОТРАСЛЕВАЯ МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА
«ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2019-2020 УЧ. ГОД
Решения к задачам очного тура
11 класс

Вариант 2

Задание 1.

Извлекая корень десятой степени из этих чисел, находим 101^2 и 7777

Так как 7777 = 101 · 77, то сравнивая эти числа, получим 101 и 77. Отсюда следует, что первое число больше.

Ответ: первое число больше

Задание 2.

Так как на конце результата цифра 0, то первый множитель оканчивается цифрой 5 или нулем. По цифре 7 и множителю 2 определяем, что первый множитель начинается с цифры 3. По второму неполному произведению определяем, что вторая цифра второго множителя 1. Итак, первый множитель 385, второй 412 или первый 380, а второй 412.

Ответ: 385 и 412, или 380 и 412.

Задание 3.

Так как $2{,}82 < 2\sqrt{2} < 2{,}83$, а $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$, то разность этих чисел, очевидно, меньше 0,2. Так как $(0{,}2)^{20} = \frac{2^{20}}{10^{20}} = \frac{(1024)^2}{10^{20}} < \frac{10^7}{10^{20}} = 10^{-13}$, то данное выражение с требуемой точностью равно нулю.

Ответ: {0}

Задание 4.

$$31\left(-5+\frac{29}{x+1}-6+\frac{29}{x+4}\right)+370 = 29\left(-7+\frac{31}{x+2}+8+\frac{31}{x+3}\right);$$

$$370-31\cdot 11+29\cdot 31\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}\right) = 29+29\cdot 31\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3};\quad \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4};$$

$(x+1)(x+2) = (x+4)(x+3);$

$x^2 + 3x + 2 = x^2 + 7x + 12 \Rightarrow x = -2{,}5.$

Ответ: $-2{,}5$

Задание 5.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами AC = 1 и BC $=\sqrt{2}$. Длина гипотенузы равна $\sqrt{3}$. Разделим прямой угол C на три равные части и отложим на получившихся лучах отрезки CM = x, CN = y. Тогда по теореме косинусов слагаемые в левой части равны AM, MN, NB. Сумма длин этих отрезков должна равняться длине гипотенузы, чтовозможно лишь в случае, когда точки M и N лежат на гипотенузе AB. А тогда x = CM биссектриса в треугольнике ACN, а y = CN – биссектриса в треугольнике BCM. Тогда получим систему равенств: $yx + x = y\sqrt{3}$ и $yx + y\sqrt{2} = x\sqrt{6}$. Решая эту систему находим, что $x = \frac{y\sqrt{3}}{y+1}$, $y = \frac{x\sqrt{6}}{x+\sqrt{2}}$. А тогда $y = 2\sqrt{6} - 4$, $x = \frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $x = \frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{5}$, $y = 2\sqrt{6} - 4$.

Задание 6.

Разобьем квадрат на 25 квадратиков со стороной $\frac{1}{5}$. Поскольку точек 126, то найдется квадратик, в котором располагаются не менее 6 точек. Квадратик со стороной $\frac{1}{5}$ полностью покроется кругом радиуса $\frac{1}{7}$. Диаметр этого круга $\frac{2}{7}$, он больше диагонали квадрата, которая равна $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

Задание 7.

Сложим первое и третье неравенства, исключим y и получим, что $x \le -24/5$. Сложение второго и третьего неравенства приводит к квадратному неравенству – следствию: $x^2 + 4x - 9 \le 0 \iff -2-\sqrt{13} \le x \le -2+\sqrt{13}$. Итак, $-2-\sqrt{13} \le x \le -\frac{24}{5}$. С учетом целочисленности x получаем x = - 5. Подставляя это значение в исходную систему, имеем:

$$\begin{cases} y \ge 20 \\ y \ge 17 \\ y \le 21 \end{cases} \iff 20 \le y \le 21.$$

Отсюда получаем ответ: (x,y) $\{(-5; 20); (-5; 21)\}$

Задание 8.

Пусть a = 0, тогда F (x) = - 8, f(x) = 3 x^2 – 4. Минимум f (x) = – 4, следовательно $a \neq 0$. Так как речь идет о наибольшем значении F(x), то это возможно лишь при $a < 0$. Имеем: $F(x) = 3a(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{a}{3} - 8$. max F (x) будет равен $-\frac{a}{3} - 8$. Далее: $f(x) = 3(x - \frac{a}{3})^2 - \frac{a^2}{3} - 4$. Тогда min f(x) равен $-\frac{a^2}{3} - 4$. Отсюда имеем $-\frac{a^2}{3} - 4 = -\frac{a}{3} - 8$, $a^2 - a - 12 = 0$,

$$a = (-3, 4). \quad \text{Следовательно } a = -3.$$

Сделаем проверку. При $a = -3$ max F (x) $= -7$, а min f(x) $= -7$ т.е. условия задачи выполнены.

Ответ: {-3}.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
ОТРАСЛЕВАЯ МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА
«ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2019-2020 УЧ. ГОД
Решения к задачам очного тура
11 класс

Вариант 3

Задание 1.

Сравнивая эти два числа, получаем $9999^{10} \vee 99^{20} <=> (9999 \vee 99^2) <=> (99 \cdot 101 \vee 99^2) => 101 > 99$.

Следовательно первое число больше второго.

Задание 2.

Трехзначное число может получиться от умножения 785 только на единицу, а четырехзначное с первой цифрой 1 только от умножения на 2. Следовательно второй множитель равен 121.

Ответ {121}

Задание 3.

Так как $3,6 < \sqrt{13} < 3,61$, а $3,46 < \sqrt{12} = 2\sqrt{3} < 3,47$, то разность $\sqrt{13} - \sqrt{12}$ меньше, чем 3,61 – 3,46 = 0,15 < 0,2. Поэтому $\left(\frac{2}{10}\right)^{20} = \frac{(2^{10})^2}{10^{20}} = \frac{(1024)^2}{10^{20}} < \frac{10^7}{10^{20}} = 10^{-13}$ Поэтому данное число с точностью до 0,001 равно 0.

Ответ: {0}

Задание 4.

$$55\left(-5 + \frac{37}{2x+1} - 8 + \frac{37}{2x+4}\right) + 752 = 37\left(-7 + \frac{55}{2x+2} + 8 + \frac{55}{2x+3}\right)$$

$$-55 \cdot 13 + 55 \cdot 37\left(\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+4}\right) + 752 = 37 + 37 \cdot 55\left(\frac{1}{2x+2} + \frac{1}{2x+3}\right)$$

$$\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+4} = \frac{1}{2x+2} + \frac{1}{2x+3}; \quad \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{2x+2} - \frac{1}{2x+4};$$

$(2x + 2)(2x + 4) = (2x + 1)(2x + 3)$

$4x^2 + 12x + 8 = 4x^2 + 8x + 3$ $4x = -5$ $x = -1,25$.

Ответ: {–1,25}

Задание 5.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами AC = $\sqrt{12}$, BC = $\sqrt{13}$. Разделим прямой угол C на три равные части и отложим на получившихся лучах отрезки CM = x, CN = y. По теореме косинусов $MA^2 = x^2 + 2 - x\sqrt{6}$, $MN = x + y^2 - \sqrt{3}\,xy$, $BN = y^2 + 3 - 3y$. По условию задачи сумма этих отрезков должна равняться $\sqrt{5}$. Но гипотенуза AB =$\sqrt{5}$, следовательно данное равенство возможно лишь когда точки M и N лежат на гипотенузе, причем x = CM – биссектриса треугольника AC N, y = CN биссектриса треугольника BCM. Записывая равенство площадей для треугольника ANC имеем:

$S_{CAM} + S_{CMN} = S_{CAN} \Rightarrow \sqrt{2}x + xy = y \cdot \sqrt{6}$. Аналогично получим из треугольника BCM: $\sqrt{3}y + xy = 3x$. Решая полученную систему двух уравнений, находим x = $\frac{2\sqrt{6}}{3+\sqrt{2}}$, $y = 4 - 2\sqrt{2}$.

Ответ: $(\frac{2\sqrt{6}}{3+\sqrt{2}};\ 4 - 2\sqrt{2})$

Задание 6.

Окружим каждый квадрат полоской шириной $\frac{1}{2}$. Тогда образующие фигуры также квадраты со стороной 2, они имеют площадь 4, а сумма площадей всех этих 30 квадратов будет равна 120. В то же время как площадь основного прямоугольника равна 150. Следовательно, найдется точка, которая не покрыта построенными квадратами, но это значит, что она удалена от данных квадратов не меньше чем на ½ по всем направлениям. А тогда круг радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в этой точке не имеет общих точек ни с одним из квадратов.

Задание 7.

Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} y^3 - 4y > 3x^2 - 18x + 26 \\ y^3 - 4y < -x^2 + 8x - 14 \end{cases}$$

Отсюда по свойству транзитивности неравенств следует, что $-x^2 + 8x - 14 > 3x^2 - 18x + 26 \Leftrightarrow 2x^2 - 13x + 20 < 0$, т.е. $x \in (\frac{5}{2}, 4)$.

Так как x целое, то x = 3. Подставляя x = 3 в систему, получаем

$$\begin{cases} y^3 - 4y > -1 \\ y^3 - 4y < 1 \end{cases}$$

Поскольку $y^3 - 4y$ целочисленно, то $y^3 - 4y = 0$, т.е. $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = -2$

Отсюда имеем ответ: (x,y) є {(3; 0); (3; 2); (3; - 2) }.

Задание 8.

Возьмем a = 0 Получаем уравнение

$2\log_2(4 - \sqrt{7+2x}) = \log_2(4 - 3x) <=> (4 - \sqrt{7+2x})^2 = 4 - 3x <=>$ $19 + 5x = 8\sqrt{7+2x} <=> 251x^2 + 62x - 87 = 0$, корни этого уравнения будут $-\frac{87}{25}$ и 1. Таким образом, искомые значения x находятся среди этих двух чисел. Проверим эти числа. Если x = 1, то имеем $2\log_{2+a^2} 1 = \log_{2+a^2} 1 =>$ 0 =0, т. е. x = 1 подходит. Если $x = -\frac{87}{25}$ то имеем: $2\log_{2+a^2}\frac{19}{5} = \log_{2+a^2(\frac{87}{25})^2}\frac{361}{25}$, $\log_{2+a^2}\frac{19}{5} = \log_{2+a^2(\frac{87}{25})^2}\frac{19}{5}$. Если a ≠ 0, то левая часть не равна правой.

Ответ: {1}.